Elaborado por
Miguel Labrador
12-10423
Ing. Electrónica.

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MA1112-Matemáticas II
2do. Examen Parcial B (35 %)
Trimestre Sep-Dic 2019

Pregunta 1. *Resuelva las siguientes integrales definidas e indefinidas*:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos\theta}\,\mathrm{sen}(2\theta)\,\mathrm{d}\theta$ (b) $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt[3]{\mathrm{sen}\,x}}\,\mathrm{d}x$

Solución:

a)$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos\theta}\,\mathrm{sen}(2\theta)\,\mathrm{d}\theta$

Se sabe que: $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$
Así:

$$\mathrm{I}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{\cos\theta}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

Y se plantea el siguiente cambio de variable: $u = \cos\theta \Rightarrow du = -\sin\theta d\theta$

$$Con = \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0 \\ \theta = 0 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

Y como $I = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos\theta}\cos\theta\sin\theta d\theta = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos\theta}\cos\theta(-\sin\theta)d\theta$

$\overset{\mathrm{CV}}{=} -2\displaystyle\int_1^0 ue^u du = 2\int_0^1 ue^u du$

Resolvemos por partes:

$\displaystyle\int_0^1 ue^u du = ue^u|_0^1 - \int_0^1 e^u du = e - e^u|_0^1 = e - e + 1 = 1$

Por lo tanto:

$$\mathrm{I}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos\theta}\sin(2\theta)d\theta = 2$$

b) $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,\mathrm{d}x$

La cantidad subradical se puede escribir como:

$3-2x-x^2 = 4-(x^2+2x+1) = 4-(x+1)^2$

Entonces:

$$I = \int \sqrt{4-(x+1)^2}dx$$

Hacemos el cambio:

$$x+1 = t$$
$$dx = dt$$

Así:

$$I = \int \sqrt{4-t^2}dt$$

Ahora, usando un cambio de variable trigonométrico:

$$t = 2\cos\theta$$
$$dt = -2\sin\theta d\theta$$

$I = -2\int \sqrt{4-4\cos^2\theta}\sin\theta d\theta$

$= -2\int 2\sqrt{1-\cos\theta}\sin\theta d\theta$

$= -4\int \sqrt{\sin^2\theta}\sin\theta d\theta$

$= -4\int |\sin\theta|\sin\theta d\theta$

Si $|\sin\theta| = \sin\theta$

$= -4\int \sin^2\theta d\theta$

$= -4\int \frac{1-\cos(2\theta)}{2}d\theta$

$= -4\left[\int \frac{1}{2}d\theta - \int \frac{\cos(2\theta)}{2}d\theta\right]$

$$= -4\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin(2\theta) + C\right] = -2\theta + \sin(2\theta) + C_1 = -2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + C_1$$

Devolvemos el cambio:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)$$
$$t = 2\cos\theta$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{4-t^2}}{2}$$

Reemplazando: $I = -2\arccos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{t\sqrt{4-t^2}}{2} + C_1$

Como $t = x+1$, nos queda finalmente:

$$\int \sqrt{4-(x+1)^2}dx = -2\arccos\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{(x+1)\sqrt{4-(x+1)^2}}{2} + C_1$$

c) $\int \frac{cos^5(x)}{\sqrt[3]{\sin(x)}}dx$

Aplicando algunas propiedades reescribimos la integral como:

$$\frac{cos^5(x)}{\sqrt[3]{\sin(x)}} = \frac{\cos(x)\left[\cos^2(x)\right]^2}{\sqrt[3]{\sin(x)}} = \frac{\cos(x)\left[1-\sin^2(x)\right]^2}{\sqrt[3]{\sin(x)}}$$

Si aplicampos cambio de variable:

$$u = \sin(x)$$
$$du = \cos(x)dx$$

Así:

$$\int \frac{\cos^5(x)}{\sqrt[3]{\sin(x)}}dx = \int \frac{(1-u^2)^2}{\sqrt[3]{u}}du = \int \frac{1-2u^2+u^4}{\sqrt[3]{u}}du = \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{u}} - \frac{2u^2}{\sqrt[3]{u}} + \frac{u^4}{\sqrt[3]{u}}\right)du =$$
$$\int \left(u^{-\frac{1}{3}} - 2u^{2-\frac{1}{3}} + u^{4-\frac{1}{3}}\right)du = \frac{u^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} - \frac{2u^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} + \frac{u^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1}\ \frac{3u^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3u^{\frac{8}{3}}}{4} + \frac{3u^{\frac{14}{3}}}{14} + C$$

Regresando el cambio: $u = \sin(x)$, nos queda:

$$I = \frac{3}{2}\left[(\sin(x))^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}(\sin(x))^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{7}(\sin(x))^{\frac{14}{3}}\right] + C$$

Pregunta 2. *Si m,n denotan números reales no nulos,* (a)*Demuestre que:*

$$\operatorname{sen}(mx)\cos(nx) = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen}((m-n)x) + \operatorname{sen}((m+n)x))$$

(b) *Use la parte anterior para calcular:* $\displaystyle\int x \operatorname{sen}(6x)\cos(4x)\,\mathrm{d}x$

Solución:

a)Se sabe que

$$\begin{aligned}\sin(mx+nx) &= \sin(mx)\cos(nx) + \sin(nx)\cos(mx)\\ \sin(mx-nx) &= \sin(mx)\cos(nx) - \sin(nx)\cos(mx)\end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones:
$\sin(mx+nx) + \sin(mx-nx) = 2\sin(mx)\cos(nx)$

$\Rightarrow \sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)\right]$

b)De la fórmula del ejercicio anterior tenemos:

$I = \displaystyle\int \frac{x}{2}\left(\sin(10x) + \sin(x)\right)dx$
$= \displaystyle\int \frac{x}{2}\sin(10x)dx + \int \frac{x}{2}\sin(x)dx$

Usando el cambio de variable solamente para la integral de la izquierda:

$$10x = t \to 10dx = dt \text{ entonces:}$$

$\displaystyle\int \frac{x}{2}\sin(10x)dx = \frac{1}{20}\int x\sin(10x)dx = \frac{1}{200}\int t\sin(t)dt$

La integral $x\sin(x)dx$ se resuelve por partes:

$\displaystyle\int x\sin(x)dx = -x\cos(x) - \int -\cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$

Así:

$$I = \frac{1}{200}\left[-t\cos(t) + \sin(t) + C_1\right] + \frac{1}{2}\left[-x\cos(x) + \sin(x]\right)$$

Devolviendo el cambio:

$$I = \frac{1}{200}\left(-10x\cos(10x) + \sin(10x)\right) + \frac{1}{2}\left(-x\cos(x) + \sin(x)\right) + C$$

Pregunta 3. *Resuelva los siguientes problemas:*

(a) *Resuelva el limite:* $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan(\frac{\pi x}{2})}$

(b) *Halle la ecuación de la recta tangente a la curva:* $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ *en al punto:*$(\frac{\pi}{2}, 1)$

Solución:

a) Ind tipo 1^{∞}. Se hace el cambio de variable:

$h = -(x-1) = 1-x$ si $x \to 1 \iff h \to 0$, así:

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan(\frac{\pi}{2}x)} = \lim_{x\to 0}(2-(1-h))^{\tan\left[\frac{\pi}{2}(1-h)\right]}$$

$$\text{Con: } \tan\left[\frac{\pi}{2}(1-h)\right] = \frac{\sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2}h) - \sin(\frac{\pi}{2}h)\cos(\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2}h) + \sin(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{2}h)} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}h)}{\sin(\frac{\pi}{2}h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{\cos(\frac{\pi}{2}h}{\sin\frac{\pi}{2}h}} = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{\frac{cos\frac{\pi}{2}h}{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\sin\frac{\pi}{2}h}{\frac{\pi}{2}h}}} = \lim_{h\to 0}\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^{\frac{\frac{2cos\frac{\pi}{2}h}{\pi}}{\frac{\sin\frac{\pi}{2}h}{\frac{\pi}{2}h}}} = \left[\lim_{h\to 0}(1+h)\right]^{\lim\limits_{h\to 0} g(h)}$$

Con: $g(h) = \dfrac{\frac{2cos\frac{\pi}{2}h}{\pi}}{\frac{\sin\frac{\pi}{2}h}{\frac{\pi}{2}h}}$

Notese que: $\dfrac{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2}{\pi}\cos\dfrac{\pi}{2}h}{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}h}{\frac{\pi}{2}h}} = \dfrac{\frac{2}{\pi}}{1} = \dfrac{2}{\pi}$

Así: $= \left[\lim\limits_{h\to 0}(1+h)\right]^{\frac{2}{\pi}} = e^{\frac{2}{\pi}} = e^{\frac{2}{\pi}}$

b)La pendiente de la recta buscada en $m = f`(\dfrac{\pi}{2})$

$$\ln(f(x)) = \cos(x)\ln(\sin(x))$$

Derivamos implícitamente: $\dfrac{f‘(x)}{f(x)} = -\sin x \ln(\sin x) + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$

Así: $\dfrac{f‘(\frac{\pi}{2})}{f(\frac{\pi}{2})} = -(1)\ln(1) + \dfrac{\cos^2 \frac{\pi}{2}}{1} = 0$

$f‘(\frac{\pi}{2}) = 0$. Luego la ecuación de la recta viene dada por $y = 1$

Pregunta 4. *Demuestre que:* $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x)$ *y use esta fórmula para calcular y simplificar:* $\sinh(lgna + lgnb)$

Solución:

$\sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}.\dfrac{e^y + e^{-y}}{2} + \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}.\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$= \dfrac{e^{x+y} - e^{y-x} + e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4} + \dfrac{e^{x+y} + e^{y-x} - e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4}$

$= \dfrac{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}}{4} = \dfrac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y)$

Simplificamos $\sinh(\ln a + \ln b) =$

$= \sinh(\ln a)\cosh(\ln b) + \sinh(\ln b)\cosh(\ln a)$

Como:

$$\sinh(\ln a) = \frac{e^{\ln a} - e^{-\ln a}}{2} = \frac{a - a^{-1}}{2}$$
$$\cosh(\ln b) = \frac{e^{\ln b} + e^{-\ln b}}{2} = \frac{b + b^{-1}}{2}$$

$= \left(\dfrac{a - a^{-1}}{2}\right)\left(\dfrac{b + b^{-1}}{2}\right) + \left(\dfrac{b - b^{-1}}{2}\right)\left(\dfrac{a + a^{-1}}{2}\right)$

$= \dfrac{ab + ab^{-1} - ab^{-1} - a^{-1}b^{-1} + ab + ba^{-1} - b^{-1}a - b^{-1}a^{-1}}{4} == \dfrac{2ab - 2a^{-1}b^{-1}}{4} = \dfrac{ab - a^{-1}b^{-1}}{2}$

Nota: Este material fue elaborado por Miguel Labrador y digitalizado por Yeisireth Guerrero y Keily Colmenares para GUIAS USB.

Yeisireth Guerrero
17-10251
Licenciatura en Química
Keily Colmenares
18-10208
Arquitectura

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com